Mécanique du solide

Exercice n°1 (★)

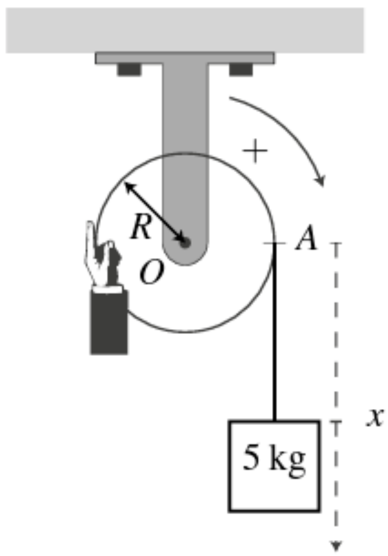
Un pendule de torsion est une tige rigide horizontale suspendue en son centre à un fil vertical formant l'axe (Δ), susceptible d'exercer un couple dit de rappel sur la tige, proportionnel à l'angle α dont est tordu le fil :

$$\Gamma_{(\Delta)} = -C\alpha$$

où C est une constante positive.
Établir l'équation différentielle du mouvement de la tige et la résoudre. Commenter. Retrouver ce résultat par un théorème énergétique.

Exercice n°2 (★)

Une masse de $m = 5\ kg$ est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_P = 1\ kg$ et de rayon $R = 10\ cm$ en liaison pivot idéal autour de son axe avec un support fixe.



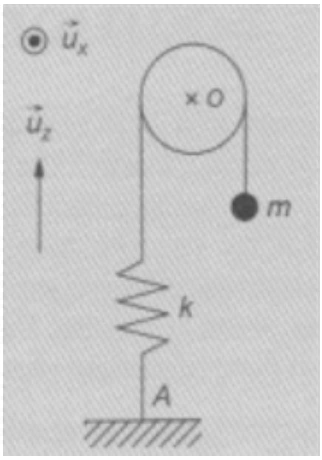
On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut :

$$I = \frac{1}{2} m_P R^2$$

1. Aspect cinématique : on suppose que la poulie est en rotation uniforme autour de son axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Quelle est la vitesse de la masse m ?
2. Aspect statique : cette même poulie est retenue par un opérateur. Quelle force l'opérateur doit-il exercer pour empêcher la poulie de tourner ?
3. Aspect dynamique : avec le même dispositif, l'opérateur lâche la poulie. Déterminer l'accélération angulaire de la poulie, l'accélération linéaire de la masse et la tension de la corde.

Exercice n°3 (★)

On considère le système suivant : ressort (raideur k), poulie (moment d'inertie $J_{(Ox)}$) et masse m . Le fil est souple, inextensible, de masse nulle et ne glisse pas sur la poulie.



1. Expliquer pourquoi le système est conservatif et peut être le siège d'oscillations.
2. Donner la période des oscillations.

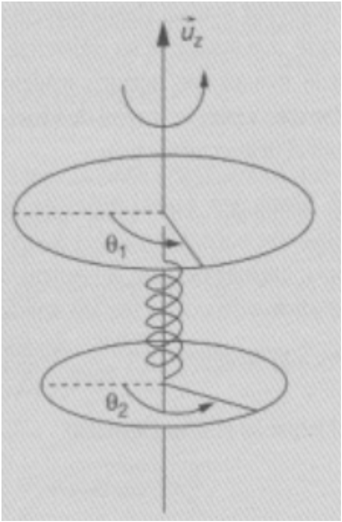
Exercice n°4 (★★)

Une personne est assise sur un tabouret dont le siège peut tourner quasiment sans frottement autour d'un axe vertical (Δ). La personne se met en rotation, les bras repliés sur elle-même, à la vitesse angulaire ω_1 (état 1). Ensuite, elle étend les bras et sa rotation se fait à une vitesse angulaire ω_2 (état 2).

1. Que dire du moment cinétique scalaire $L_{(\Delta)}$ du système (personne-siège du tabouret) pendant cette opération ?
2. Dans les états initial et final, le système est assimilable à un solide, de moments d'inertie initial J_1 par rapport à l'axe (Δ) et J_2 dans l'état final. Comparer J_1 et J_2.
3. Trouver une relation entre les moments d'inertie et les vitesses angulaires initiale et finale. Commenter le résultat.
4. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système entre les états 1 et 2. Commenter le résultat.
5. L'expérience est plus spectaculaire si la personne tient dans ses mains des haltères. Expliquer pourquoi.
6. Ensuite, la personne replie à nouveau les bras. Quelle est sa vitesse angulaire ω_3 dans cet état ?
7. Appliquer de nouveau le théorème de l'énergie cinétique entre les états 2 et 3. Qu'en penser ?

Exercice n°5 (★★)

Deux disques sont libres en rotation autour de l'axe (Oz). Leurs moments d'inertie par rapport à cet axe valent respectivement J_1 et J_2. Ils sont liés par un fil de torsion, de constante C, c'est-à-dire que l'action exercée par l'un sur l'autre est un couple, de valeur proportionnelle à l'écart entre leurs angles (repérés par rapport à la même référence).



À l'instant initial, les deux disques sont immobiles, le premier disque dans la position θ_{1_0} et le second $\theta_{2_0} = 0$.

1. Trouver le système d'équations différentielles couplées caractérisant l'évolution du système.
2. Résoudre explicitement leur évolution au cours du temps. Quelle est la pulsation naturelle d'oscillations libres du système, appelée pulsation propre ?
3. Par définition, on obtient les pulsations propres d'un système en imposant que tous les degrés de liberté oscillent à la même pulsation, c'est-à-dire qu'on cherche des solutions de la forme

$$\underline{\theta}_i(t) = \underline{A}_i e^{j\omega t}$$

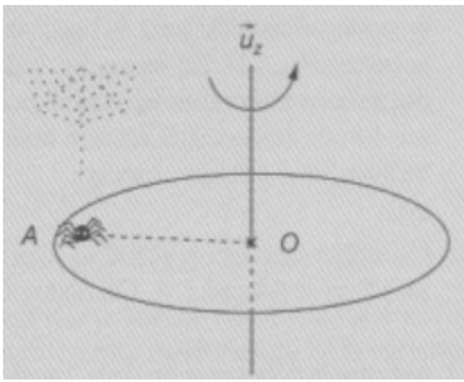
   Est-ce cohérent ?

Exercice n°6 (★★★)

Un disque homogène, de masse M et de rayon a, tourne sans frottement autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω_0. Pour le disque, on donne le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation :

$$J_{(Oz)} = \frac{Ma^2}{2}$$

Une araignée de masse m se laisse glisser verticalement lentement le long d'un fil et tombe sur la périphérie du disque en effectuant un choc mou (l'araignée se colle au disque).



1. Quelle(s) quantité(s) se conserve(nt) lors du choc ?
2. Quelle est la vitesse angulaire ω_0' du système disque-araignée après le choc ? Quelle est l'énergie dissipée lors du choc ?
3. L'araignée se met alors à marcher vers le centre du disque. Quelle est la vitesse de rotation du disque quand l'araignée atteint le centre ?
4. Calculer l'énergie cinétique finale du système. D'où provient ce gain d'énergie ?

Exercice n°7 (★★★)

Dans une machine tournante, la partie mobile nommée rotor possède un moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation (fixe). Le rotor est soumis à un couple moteur $\Gamma_m = \Gamma_0$ constant, ainsi qu'à des frottements fluides de moment $\mathcal{M} = -\alpha\omega$ où α est une constante et ω la vitesse angulaire du rotor.

1. Expliquer ce qu'est le signe de α.
2. Le rotor est initialement immobile. Donner l'évolution de sa vitesse $\omega(t)$ par une méthode dynamique. On donnera notamment sa vitesse finale ω_f et un temps caractéristique d'évolution τ. On commentera la dépendance de ces quantités par rapport à α.
3. En fait, suite à des vibrations du dispositif, le couple moteur varie comme $\Gamma_0\left(1+r\cos(\Omega t)\right)$ où r est liée à l'intensité de la perturbation et Ω est sa pulsation. On cherche, après la fin du régime transitoire, une évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ sous la forme : $\omega(t)=\omega_f + A\cos(\Omega t-\varphi)$ où A et φ sont des constantes. Quelle est la durée du régime transitoire ?
4. Exprimer A et $\tan(\varphi)$ en fonction de r, Ω, τ et ω_f. On pourra utiliser la notation complexe.
5. Expliquer pourquoi, afin de régulariser le fonctionnement du rotor, on lui fixe un anneau de masse assez importante et grand rayon, appelé volant d'inertie. Quelles sont les limites de cette méthode ?